Exercice n°1 : ©

$ABCD$ est un carré direct ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie distincte de la symétrie S_{Δ} et telle que : $f(B)=C$ et $f(D)=A$.

1- a) Montrer que le point $O=B*D$ est invariant par f et que c'est l'unique point du plan invariant par f.

b) En déduire la nature et les caractéristiques de f.

2- Soit $g=f\circ S_{\Delta}$ et $\varphi=S_{\Delta}\circ f$

a) Chercher $g(A)$ et $g(C)$. En déduire que $g=S_{(AC)}$.

b) Montrer que $\varphi=S_{(BD)}$.

c) En déduire la nature de $g\circ\varphi$.

Exercice n°2 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, on désigne par O le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le triangle OCA est équilatéral.
2. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur A et B sur C.

   b) Montrer que f est une rotation. Construire son centre I.

   c) En calculant $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}}\right)$ montrer que I appartient au segment [AB].

   d) Calculer le rapport $\frac{IA}{IC}$, en déduire que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).
3. Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f\circ r$.

   b) Soit C' l'image de C par f, montrer que O, I et C' sont alignés.
4. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme O en A et B en C.

   b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

c) Montrer que g(C) = C'.

5. Soit $h = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AB)}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de h.

Exercice n°3 :

On considère dans le plan orienté un rectangle ABCD de centre O tel que $AB = 2BC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f(I) = J. caractériser f.

2. Soit g = $R_{\left(I, \frac{\pi}{2}\right)} \circ$ f.

a) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer g(A).

c) Déduire une construction du point Ω centre de g.

3. Soit h l'antidéplacement tel que h(A) = C et h(I) = J.

a) Montrer que h est une symétrie glissante.

b) Montrer que h(B) = D.

c) On pose h(D) = D'. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AD = CD'.

d) En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C.

e) En déduire la forme réduite de h.

4. a) Construire le point C' = h(C).

b) Le cercle de diamètre [AB] recoupe [AC] en E, le cercle de diamètre [CD] recoupe [CC'] en E'.

Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ). Montrer que h(E) = E' et que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{IJ}$.

Exercice n°4 : (session principale 2003) ©

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soient D = r(C) et E = r^{-1} (B).

On désigne par I le milieu du segment [CD].

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A.

   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit g = f o r.

   a) Montrer que g est une translation.

   b) Soit F = g(E).

   Montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.

   c) Montrer que les points C, A et F sont alignés.

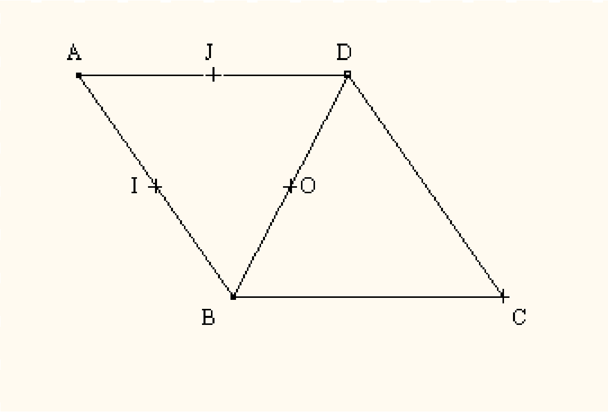
3. Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

   a) Montre qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.

   b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice n°5 : (session de contrôle 2008) ©

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci – contre, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD] et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



1. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

   b) Caractériser f.

   c) Déterminer l'image du triangle ABD par f.

2. Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que S(A) = C.

   a) Déterminer l'image du segment [BD] par S.

   b) En déduire que S est la symétrie orthogonale d'axe (BD).

3. Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble {A, B, D} en l'ensemble {B, C, D} et tel que g(A) = D.

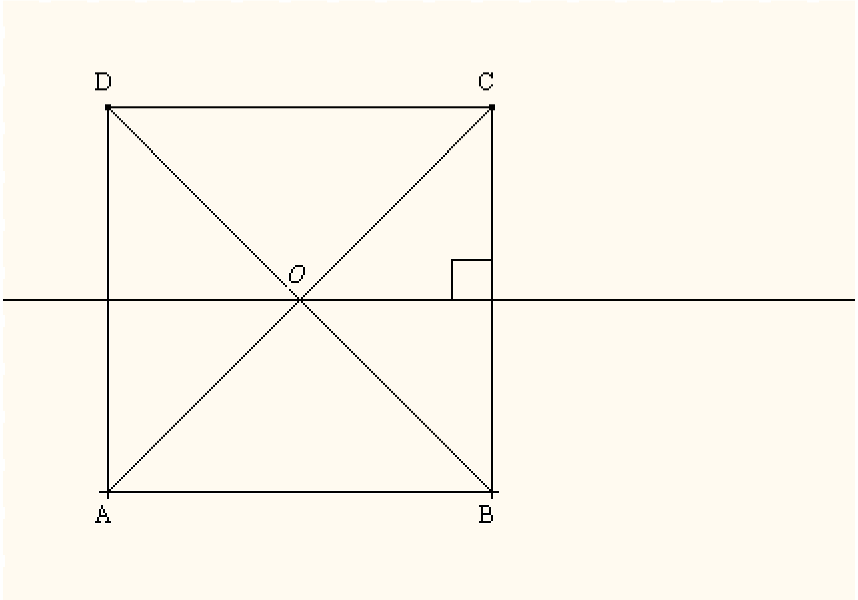
   a) Montrer que g(D) = B.

   b) Caractériser alors g.

Exercice n°1 :

$ABCD$ est un carré direct ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie distincte de la symétrie S_Δ et telle que : $f(B)=C$ et $f(D)=A$.



1. a) $O=B*D \Rightarrow f(O)=f(B)*f(D)$ car f conserve le milieu

$\Rightarrow f(O)=C*A=O \Rightarrow O$ est un point invariant par f.

Supposons qu'il existe un autre point O' invariant par $f \Rightarrow f$ est soit une symétrie axiale soit l'identité du plan

- Supposons que f est une symétrie axiale $\Rightarrow f = S_\Delta$ car $f(B) = C$. Absurde
- Supposons que f est l'identité du plan $\Rightarrow f(B) = B$. Absurde

Ainsi O est l'unique point invariant par f.

b) f est une isométrie qui admet un seul point invariant O $\Rightarrow f$ est une rotation de centre O

$$\left.\begin{array}{l} f(O)=O \\ f(B)=C \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow f = r_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$$

2. Soit $g=f\circ S_\Delta$ et $\varphi=S_\Delta\circ f$

a) $g(A)=f\circ S_\Delta(A)=f(D)=A$

$g(C) = f \circ S_\Delta(C) = f(B) = C$

g est une isométrie qui laisse fixe deux points distincts A et C $\Rightarrow$ g est soit une symétrie axiale soit l'identité du plan

Or g est distincte de l'identité car si non *f* soit égale à S_Δ ce qui est absurde.

Ainsi g est la symétrie axiale d'axe (AC).

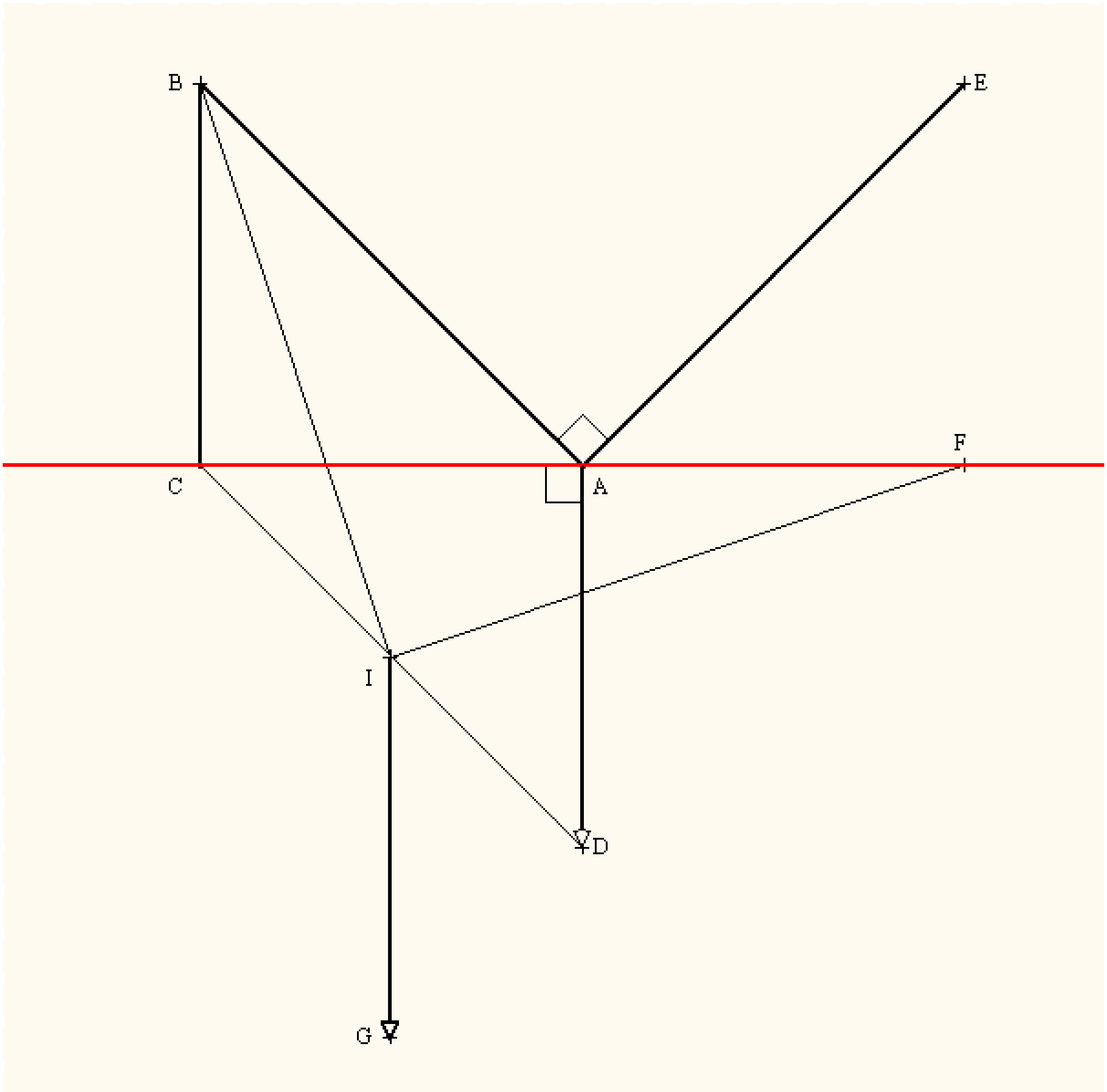
b) $\varphi(B) = S_\Delta \circ f(B) = S_\Delta(C) = B$

$\varphi(D) = S_\Delta \circ f(D) = S_\Delta(A) = D$

$\Rightarrow \varphi = S_{(BD)}$

c) $g \circ \varphi = S_{(AC)} \circ S_{(BD)} = S_O$ car $(AC) \perp (BD)$ en O.

Exercice n°4 :



1. a) AC = DA $\neq$ 0 $\Rightarrow$ il existe un déplacement unique f tel que f(A) = D et f(C) = A.

   b) Soit α une mesure de l'angle de f

$$\Rightarrow \alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DA}})[2\pi] \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})[2\pi] \equiv \pi + \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\alpha \neq 2k\pi \Rightarrow$ f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Le centre de f est un point commun des médiatrices respectives des segments [AD] et [CA]

$\Rightarrow$ I est le centre de f.

$\Rightarrow$ f = $r_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

2. a) g = f o r.

g est la composée de deux déplacements donc g est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$

$\Rightarrow$ g est une translation.

<u>Remarque</u> : f o r (A) = f(A) = D $\Rightarrow$ g est une translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

b) F = g(E).

f(B) = f o r (E) = g(E) = F $\Rightarrow r_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)}(B) = F \Rightarrow \begin{cases} IB = IF \\ \left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow BIF$ est un triangle rectangle et isocèle.

c) $\begin{cases} f(C) = A \\ f(B) = F \end{cases} \Rightarrow (CB) \perp (AF)$

Or (CB) $\perp$ (CA) $\Rightarrow$ (CA) // (AF) $\Rightarrow$ C, A et F sont alignés.

3. $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IG} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DG} \Rightarrow AI = DG$

Or IA = IC = ID $\Rightarrow$ CI = DG $\neq 0 \Rightarrow$ il existe un antidéplacement unique φ tel que φ(C) = D et φ(I) = G.

b) φ est un antidéplacement donc φ est soit une symétrie axiale soit une glissante.

Puisque [CD] et [IG] n'ont pas la même médiatrice donc φ n'est pas une symétrie axiale

φ est donc une symétrie glissante

$\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ ou $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ

φ(C) = D $\Rightarrow$ I le milieu de [CD] est un point de Δ

φ(I) = G $\Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{IG}$

Δ est donc la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IG}$

Exercice n°5 :

1. a) AB = AD et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ $\Rightarrow$ ABD est équilatéral $\Rightarrow$ AB = BD $\neq 0$

$\Rightarrow$ il existe un antidéplacement unique f tel que f(A) = B et f(B) = D.

b) f est soit une symétrie axiale soit une symétrie glissante

* f o f(A) = D $\neq$ A $\Rightarrow$ f o f n'est pas l'identité $\Rightarrow$ f n'est pas une symétrie axiale $\Rightarrow$ f est une symétrie glissante.

* Soit f = $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$, avec $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ.

f o f(A) = D $\Rightarrow t_{2\vec{u}}(A) = D \Rightarrow 2\vec{u} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IO}$

f(A) = B $\Rightarrow$ A $*$ B = I $\in \Delta$

$f(B) = D \Rightarrow B * D = O \in \Delta \Rightarrow \Delta = (IO)$

c) f(ABD) est un triangle équilatéral indirect car f est une isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Puisque $f(A) = B$ et $f(B) = D \Rightarrow f(ABD) = BDC$.

2. Soit S un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que

   $S(A) = C$.

   a) $S(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\}$ et $S(A) = C \Rightarrow S(\{B, D\}) = \{B, D\} \Rightarrow S([BD]) = [BD]$.

   b) $S([BD]) = [BD]$

   Deux cas se posent :

   - $S(B) = B$ et $S(D) = D \Rightarrow$ S est un antidéplacement qui a des points invariants $\Rightarrow S = S_{(BD)}$
   - $S(B) = D$ et $S(D) = B$

     $O = B * D \Rightarrow S(O) = D * B = O \Rightarrow$ S est une symétrie axiale d'axe la médiatrice de [BD] qui est (AC) $\Rightarrow S(A) = A$ impossible car $S(A) = C$.

     Ainsi le seul cas qui se pose est $S = S_{(BD)}$

3. Soit g un antidéplacement qui transforme $\{A, B, D\}$ en $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$.

   a) $g(\{A, B, D\}) = \{B, C, D\}$ et $g(A) = D \Rightarrow g(\{B, D\}) = \{B, C\}$

   Si $g(D) = C \Rightarrow g(B) = B \Rightarrow$ g est une symétrie axiale $\Rightarrow g \circ g$ est l'identité

   Or $g \circ g\ (A) = C \neq A$ absurde.

   $\Rightarrow g(D) \neq C \Rightarrow g(D) = B$.

   b) g est un antidéplacement tel que : $g(A) = D$, $g(D) = B$ et $g(B) = C$.

   g ne peut pas être une symétrie axiale car $g \circ g\ (A) = B \neq A$

   $\Rightarrow$ g est une symétrie glissante de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JO}$ et d'axe la droite (JO) (milieux de [AD] et [DB]).