http://afimath.jimdo.com/	DEVOIR DE SYNTHÈSE N° : 01	$4^{ème}$Inf2 2 heures 2010-2011 Prof AFIF BEN ISMAIL

Exercice 1(3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est exacte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie

1) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel que f (1)=2 alors

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{x-1}{x}\right) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

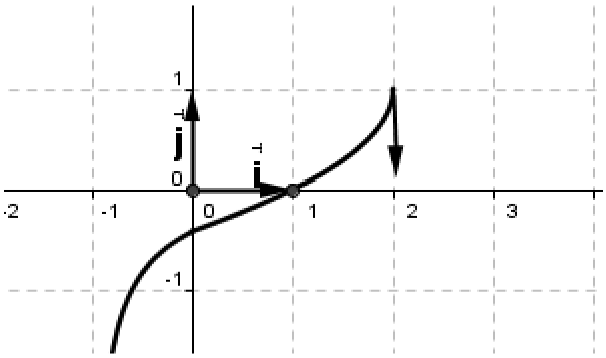
2) f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(2) = 0$ alors :

a) La courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

b) La courbe de f admet une tangente vertical au point d'abscisse 2.

c)La courbe de f admet nécessairement un extremum au point d'abscisse 2.

3) La courbe ci dessous est celle d'une fonction continue sur $]-1,2]$



a) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\infty$ b) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$ c) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2$

Exercice 2 (4 points)

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de dérivabilité de f et sa fonction dérivée f'

1)$f(x) = \sqrt{x^4 + 5x^2 + 1}$

2)$f(x) = (x-1)(x+3)^4$

3)$f(x) = \left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)^5$

4) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$

Exercice 3(6 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(1+3i)z-2+i=0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) On pose $f(z)=z^3-(2+3i)z^2+(4i-1)z+2-i$

a)Montrer que l'équation f(z)=0 admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle que l'on déterminera
b) Déterminer les complexes b et c tels que $f(z)=(z-1)(z^2+bz+c)$ quelque soit z $\in\mathbb{C}$
c)Résoudre alors l'équation $f(z)=0$
3) Soit dans le plans muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A (1+2i), B(i) et C(1)
a) placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC
b) Déterminer l'aire du trapèze OBAC

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1)a)Vérifier que pour tout $x>0$ on a : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$, en déduire que f est continue a droite en 0

b) Montrer que f est dérivables a droite en 0.

c) Déterminer une équation de la demi tangente a la courbe de f au point d'abscisse o

2)a)Montrer que pour tout $x>0$ on a : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\dfrac{1}{x}}$

b) Déduire alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat

3)a)Montrer que f est dérivable sur$]0,+\infty[$et que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

c)Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera
d) Calculer $f(1)$, en déduire $(f^{-1})'(\sqrt{2}-1)$

CORRECTION DE DEVOIR DE SYNTHÈSE N°01 (4ème INF2)

Exercice 1

1) b 2)a 3)b

Exercice 2

1)$f(x) = \sqrt{x^4 + 5x^2 + 1}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = \dfrac{4x^3 + 10x}{2\sqrt{x^4 + 5x^2 + 1}} = \dfrac{2x^3 + 5x}{\sqrt{x^4 + 5x^2 + 1}}$

2)$f(x) = (x-1)(x+3)^4$

f est derivable sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = (x+3)^4 + 4\ (x-1)(x+3)^3$

$= (\mathrm{x} + 3 + 4\mathrm{x} - 4)\ (x+3)^3$

$= (5\mathrm{x} - 1)\ (x+3)^3$

3)$f(x) = \left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)^5$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = 5\left(2x + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)^4$

$= \left(10x + \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^2+1}\right)^4$

4) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\left(x^2+1\right) - \left(x\sqrt{x^2+1}\right) \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$= \dfrac{\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 + x^2\sqrt{x^2+1}\right) - 2x^2\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^2}$

$= \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 3

1) (E) : $z^2-(1+3i)z-2+i=0$

$\Delta=(1+3i)^2-4(-2+i)=2i=(1+i)^2$

$z_1=\dfrac{1+3i-(1+i)}{2}=i, z_2=\dfrac{1+3i+(1+i)}{2}=1+2i$

$S_{\mathbb{C}}=\{i;1+2i\}$

2) x solution réelle de l'équation $f(z)=0 \Leftrightarrow$

$x^3-(2+3i)x^2+(4i-1)x+2-i=0$

Ceci donne le système

$\begin{cases}-3x^2+4x-1=0\\ x^3-2x^2-x+2=0\end{cases}$; la première ligne donne comme solutions $\frac{1}{3}$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et 1 qui convient.

$b)\ f(z)=(z-1)(z^2+bz+c)=z^3+bz^2+cz-z^2-bz-c$

$=z^3+(b-1)z^2+(c-b)z-c$ (pour tout z∈ℂ)

Ceci donne par identification le système

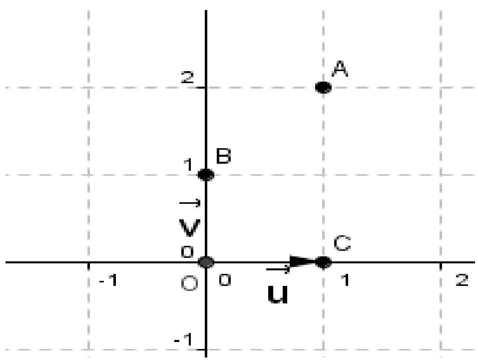
$\begin{cases}b-1=-2-3i\\ c-b=4i-1\\ -c=2-i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-1-3i\\ c=-2+i\end{cases} \Rightarrow f(z)=(z-1)\left[z^2-(1+3i)z-2+i\right]$

$f(z)=0 \Leftrightarrow f(z)=(z-1)\left[z^2-(1+3i)z-2+i\right]=0$

$\Leftrightarrow z-1=0$ ou $z^2-(1+3i)z-2+i=0$

$\Leftrightarrow z=1$ ou $z=i$ ou z=1+2i ,Donc $S_{\mathbb{C}}=\{1,i;1+2i\}$

3) a)



b) $AB^2 = |1+2i-i|^2 = |1+i|^2 = 2$, $CB^2 = |1-i|^2 = 2$ et $AC^2 = |1+2i-1|^2 = |2i|^2 = 4$

AB=AC⇒ABC triangle isocèle en B

$AC^2 = BA^2 + BC^2 \xrightarrow[\text{Réciproque de Pythagore}]{}$ ABC triangle rectangle en B

c)$\mathcal{A}$= $\dfrac{(AC+OB)\times OC}{2} = \dfrac{3}{2}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0 = f(0)$ Donc f continue a droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{\cancel{x}}{\sqrt{1+x^2}+1}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \dfrac{1}{2}$ Donc f est dérivables a droite en 0.

c) Equation de la demi tangente a la courbe de f au point d'abscisse o

$$T : \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2)$a)\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)}$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+\dfrac{1}{x}} = 1$

La droite d'équation y=1 est une asymptote a la courbe de f au voisinage de $+\infty$

3)a) $x \mapsto x$ Dérivable sur $]0, +\infty[$ (1)

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ Dérivable sur]0, +∞ [(car $x \mapsto x^2+1$ polynôme strictement positive sur $\mathbb{R}$)

Donc $x \mapsto \sqrt{x^2+1}+1$ dérivable sur]0, +∞ [et non nulle (2)

(1) et (2)⟹ f est dérivable sur]0,+∞[

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)x - \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1 + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}} = 1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

c) f continue strictement croissante sur [0 ;+∞[
f([0 ;+∞[)=[0,1[
Donc f est une bijection de [0,+∞[sur [0,1[
d) Calculer $f(1)=\sqrt{2}-1$, en déduire $(f^{-1})'(\sqrt{2}-1)$

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$