

Blague : Logarithme et Exponentielle vont ensemble au cinéma. Lequel invite l'autre ?

Réponse : exponentielle, car logarithme népérien (ne peut rien).

Exercice

I) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2) Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

II) Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on pose :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et φ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1)a) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2)a) Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3) a) Justifier que la droite D d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe φ .

b) Etudier les positions relatives de la courbe φ et de la droite D .

c) Tracer la droite D et la courbe φ dans le plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

4) Calculer \mathcal{A} la mesure exprimée en cm^2 , de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe φ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Correction

$$1)1) g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ car } x \in]0 ; +\infty[.$$

donc g est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

$$2) g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		○	+

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x - 1}_{\rightarrow -1} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\rightarrow -\infty} = +\infty$$

donc droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe φ

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x - 1}_{\rightarrow +\infty} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\rightarrow 0} = +\infty$$

2) a)

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$, on en déduit les variations de f :

x	0	1	∞
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

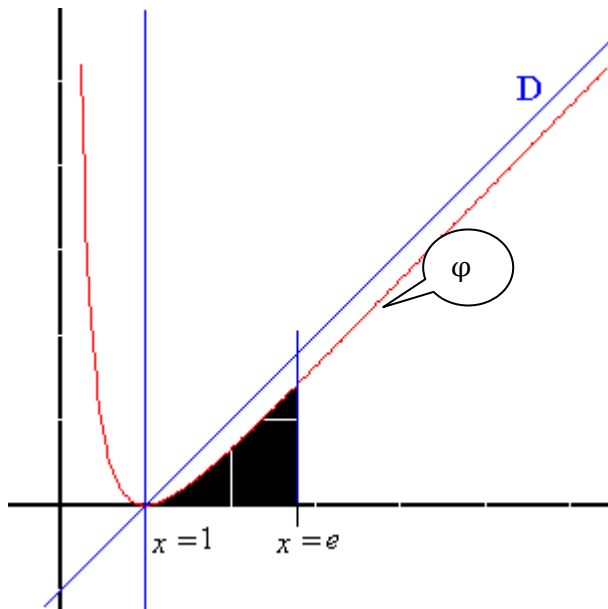
3)a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe φ en $+\infty$.

b)

x	0	1	∞
$f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln(x)}{x}$	+	0	-
position	φ/D	$\varphi=D = (1; 0)$	D/φ

c)



4) $\mathcal{A} = 4 \int_1^e f(x) dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = (2e^2 - 4e) \text{ cm}^2$