

Les Similitudes Complexes

Prérequis :

- le cours sur les nombres complexes a été fait ;
- la forme trigonométrique d'un nombre complexe (module, argument,...) est connue ;
- l'écriture complexe des transformations usuelles a été vue.

Objectif :

- mettre en place quelques notions sur les similitudes directes du plan ;
- exploiter leur écriture complexe ;
- illustrer leur mise en oeuvre dans la résolution de problèmes de géométrie au travers de quelques exemples simples.

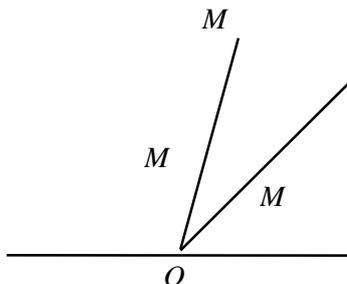
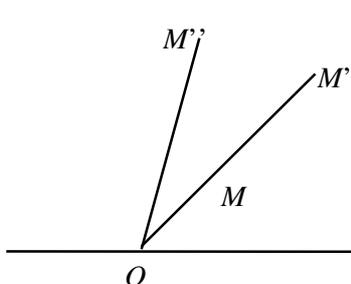
Introduction :

- faire un rappel des transformations connues ;
- on peut commencer par faire observer une frise, se référer à des motifs répétés mais qui n'ont pas la même taille (prendre un exemple que les enfants sont connaitrent). Les dessins sont semblables. La question est : **Comment définir mathématiquement que deux dessins sont semblables ?**

Dans un premier temps on prend deux applications, bien connues, une homothétie et une rotation de même centre O . Et on va voir ce que l'on obtient en faisant la composée des deux.

On prend un point M quelconque par une transformation h on l'augmente $h(M) = M'$, ensuite on fait tourner ce point d'un certain angle $r(M') = M''$.

On fait la même chose mais cette fois-ci on commence par faire tourner le point et ensuite on augmente, on a donc $r(M) = M_1$ et $h(M_1) = M_2$. On remarque sans aucune difficulté que $M_2 = M''$



Prouvons que $r \circ h = h \circ r$

- On a dans le premier cas $r(h(M)) = r(M') = M''$;
d'où $OM' = k \cdot OM$, puis $OM'' = OM'$ (rotation conserve les distances) donc $OM'' = k \cdot OM$
et $\theta = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}) = (k \cdot \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''})$ soit $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM''}) = \theta$
- On a dans le second cas $h(r(M)) = h(M_1) = M_2$;
d'où $OM = OM_1$, puis $OM_2 = k \cdot OM_1$ c'est à dire $OM_2 = k \cdot OM$
et $\theta = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM}, k \cdot \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2})$ soit $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = \theta$
d'où le résultat ($M'' = M_2$)

Cours.

Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel k et qui conserve les angles orientés. C'est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.

On sait qu'un nombre complexe peut se mettre sous la forme $a = \rho \cdot e^{i\theta}$.

L'image d'un point par une application f peut s'écrire, sous forme complexe :

$z' = \rho \cdot z$ lorsqu'il s'agit d'une homothétie de rapport ρ ; $\theta = 0$, angle nul ;

$z' = e^{i\theta} \cdot z$ lorsqu'il s'agit d'une rotation d'angle θ ; $\rho = 1$, rapport un ;

$z' = z + b$ b est l'affixe du vecteur de translation, rapport un et angle nul.

Ici nous avons $f(M) = M' = M_2$; ce qui peut encore s'écrire, sous forme complexe :

Dans le premier cas : $z' = \rho \cdot z$ et $z'' = e^{i\theta} \cdot z' = e^{i\theta} \cdot (\rho \cdot z) = \rho \cdot e^{i\theta} \cdot z = a \cdot z$

Dans le second cas : $z_1 = e^{i\theta} \cdot z$ et $z_2 = \rho \cdot z_1 = \rho \cdot (e^{i\theta} \cdot z) = \rho \cdot e^{i\theta} \cdot z = a \cdot z$

Nous avons finalement : $z'' = a \cdot z$, lorsque le centre est O

Une similitude directe du plan est la composée d'une homothétie et d'un déplacement (rotation ou translation). Si nous utilisons les écritures complexes de d et de h , nous avons :

$d : z' = e^{i\theta} \cdot z + b_0$ θ réel et b_0 complexe

$h : z' = \rho \cdot z + b_1$ ρ rapport de h et b_1 complexe

L'écriture complexe de $h \circ d = d \circ h$: $z' = \rho \cdot (e^{i\theta} \cdot z + b_0) + b_1$

D'une manière générale nous pouvons donc écrire que l'écriture complexe d'une similitude directe est : $z' = a \cdot z + b$

Si le centre est le point Ω d'affixe ω , nous avons, $z' = a \cdot z + b$ et $\omega = a \cdot \omega + b$; par différence on obtient sans problème : $z' - \omega = a \cdot (z - \omega)$

le rapport de cette transformation est celui de l'homothétie ;

l'angle de cette transformation est celui de la rotation.

Si M a pour image M' par la similitude S de centre Ω (d'affixe ω), de rapport ρ et d'angle θ ; géométriquement nous avons les résultats suivants :

1. $\Omega M' = \rho \cdot \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

2. $S(A) = A'$; $S(B) = B'$ c'est à dire $r(A) = A_1$; $h(A_1) = A'$ et $r(B) = B_1$; $h(B_1) = B'$

$\overrightarrow{A'B'} = \rho \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$ or $A_1B_1 = AB$ donc $A'B' = \rho \cdot AB$

$\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = (\overrightarrow{AB}, \rho \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

$S(A) = A'$; $S(B) = B'$ $\Leftrightarrow A'B' = \rho \cdot AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$

exercices :

Exercice 1. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit f l'application de P vers P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z'

défini par : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

1° Déterminer la nature des éléments caractéristiques de f .

2° Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M' (Ω est le point tel que $f(\Omega) = \Omega$;

M est un point quelconque distinct de Ω).

(D'après Bac C, 1991)

Correction :

1. L'expression complexe d'une similitude directe est de la forme $az + b$ donc f est une similitude.

Le point invariant vérifie $z_0 = az_0 + b$ donc $z_0 = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_0 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et après calcul on a $z_0 = 2$ donc le centre Ω a pour coordonnées $\Omega(2 ; 0)$.

Le rapport de la similitude est donné par $\left| \frac{3+i\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

L'angle de la similitude est donné par $\arg\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\right)$ et $\frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc l'angle est $\frac{\pi}{6}$

2. $(\vec{M'\Omega}, \vec{M'M}) = \arg\left(\frac{z'-z}{z'-z_0}\right)$ on a $\frac{z'-z}{z'-z_0} = \frac{(-1+i\sqrt{3})z + 2(1-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})z - 2(3+i\sqrt{3})} = \dots = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc $(\vec{M'\Omega}, \vec{M'M}) = \arg\left(\frac{z'-z}{z'-z_0}\right) = \frac{\pi}{2}$ l'angle $\Omega M' M = \frac{\pi}{2}$ c'est donc un triangle rectangle.

Exercice 2.

1° Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , déterminer la forme complexe de la similitude f de centre $\Omega(1 ; 1)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$

2° Déterminer analytiquement, puis construire l'ensemble des points M tels que $f(M)$ est un point de l'axe (O, \vec{u}) .

Correction :

1. **Première méthode :**

L'expression complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ et on sait que le rapport de cette

similitude est la norme de a et l'angle de la similitude est l'argument de a . Ici on a : $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$

et $z_0 = 1 + i$. Le point invariant vérifie $z_0 = az_0 + b$ d'où $(1 + i) = (1 + i\sqrt{3})(1 + i) + b$

donc $b = \sqrt{3}(1 - i)$ la forme complexe de la similitude est donc $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$

Deuxième méthode :

L'expression complexe d'une similitude directe peut également s'écrire $z' - z_0 = a.(z - z_0)$ donc

$$z' - z_0 = a.(z - z_0) \Leftrightarrow z' - (1 + i) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.(z - (1 + i)) \Leftrightarrow z' - (1 + i) = (1 + i\sqrt{3}).(z - (1 + i))$$

On obtient, après calcul, $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$ (heureusement le même résultat).

2. L'ensemble des points M tels que $f(M)$ est un point de l'axe $(O, \overrightarrow{u}) \Leftrightarrow z'$ est un réel

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ y' = y + x\sqrt{3} - \sqrt{3} \end{cases} \text{ et comme } y' = 0 \text{ on a } y = \sqrt{3}(1 - x)$$

L'ensemble des points M recherché est une droite d'équation $y = \sqrt{3}(1 - x)$

Exercice 3.

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application f de P dans P qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

1° Trouver la nature de f et les éléments qui la caractérisent.

2° Quelle est l'image par f de la droite D d'équation $y = x$.

Correction :

$$\begin{aligned} 1. \quad z' = x' + iy' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) + (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})i \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)x + \frac{\sqrt{2}}{2}(i - 1)y + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)i.y + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})i \\ z' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).(x + iy) + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})i \Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).z + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})i \end{aligned}$$

$$a = z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \text{ et } b = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + (2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2})i$$

On trouve ainsi que le rapport de la similitude est 1 et l'angle de cette transformation est $\frac{\pi}{4}$

Le point invariant est donné par $z_0 = az_0 + b$ ou encore $z_0 = \frac{b}{1 - a} = \dots = z_0 = 1 + 2i ; \Omega(1 ; 2)$

2. Si $y = x$ on a $x' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ les points appartiennent à cette droite.

Exercice 4.

Dans le plan P orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$.

On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD]. Représenter ces points sur une figure (on choisira AB = 4 cm).

On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S(A) = I et S(C) = K

1° Recherche géométrique des éléments de S.

a) Donner le rapport et l'angle de S.

b) Démontrer que le centre Ω de S est le point d'intersection autre que I des cercles de diamètre [AD] et [IC]. Placer ces cercles et Ω sur la figure.

2° Recherche du centre de s à l'aide des nombres complexes.

Le plan est rapporté au repère direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

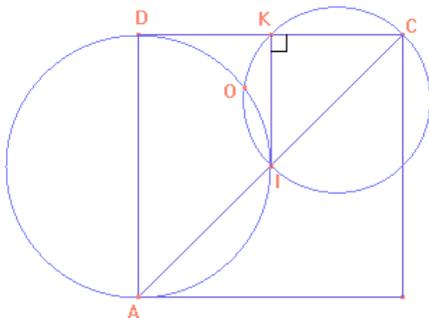
a) Donner les affixes des points A, C, I et K.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) En déduire les coordonnées de Ω .

(D'après Bac C.E., Amérique du Sud, 1991)

Correction :



Recherche géométrique :

1. S(A) = I et S(C) = K ; le rapport de la similitude est donné

par le rapport IK sur AC ; $IK = \frac{1}{2}a$ et $AC = a\sqrt{2}$. On a

$$\text{donc } \frac{IK}{AC} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'angle de la similitude est donné par l'angle formé par

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{4}$$

S est donc une similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2. $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DI}) = \frac{\pi}{4}$

donc $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DI})$; on peut en déduire la cocyclicité des points Ω, D, A et I . $\Omega \in$ cercle circonscrit à DAI = cercle de diamètre [AD].

De même $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega K}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Omega, I, C$ et K cocycliques donc $\Omega \in$ cercle de diamètre [IC]

Ces deux cercles ont deux points d'intersection Ω et I le point invariant n' est pas I (car S(A) = I) donc le point invariant est Ω .

Recherche complexe :

1. A a pour affixe 0 ; C a pour affixe $1 + i$; I a pour affixe $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ et K a pour affixe $\frac{1}{2} + i$.

2. $z' = az + b$ et S(A) = I et S(C) = K $\Rightarrow \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = b$ et $\frac{1}{2} + i = a(1 + i) + b \Rightarrow a = \frac{1+i}{4}$

$$\text{donc } z' = \frac{1+i}{4} \cdot Z + \frac{1+i}{2}$$

$$3. z_0 = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i; \Omega\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

Cours.

Voyons ce que donne la composée de deux similitudes f et g .

Nous avons, d'après ce qui a été vu, précédemment : $f(z) = a.z + b$ et $g(z) = a'.z + b'$

$$f \circ g(z) = a.(a'.z + b') + b = a.a'.z + a.b' + b$$

$$g \circ f(z) = a'.(a.z + b) + b' = a.a'.z + a'.b + b'$$

$f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même rapport, le même angle mais n'ont pas le même centre ; on peut donc écrire que $f \circ g \neq g \circ f$

exercices :

Exercice 5.

Dans un plan orienté on considère un triangle rectangle ABC tel que l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ mesure $+\frac{\pi}{2}$. La hauteur issue de C coupe (BA) en H et coupe la parallèle à (BC) menée par A en D.

On pose $CA = b$ et $BC = a$.

1° Soit s la similitude directe transformant C en A et B en C.

a) Déterminer son rapport en fonction de a et b et calculer son angle.

b) En utilisant cet angle, démontrer que le centre de s est le point H.

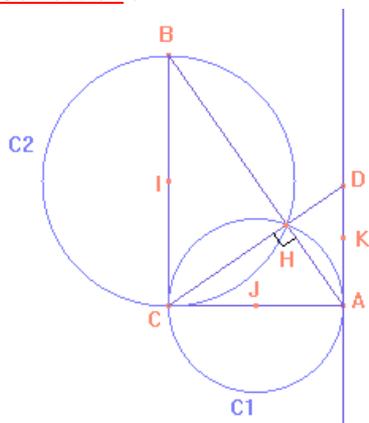
c) Quelle est l'image de A par s ?

2° En utilisant s démontrer l'égalité $HC^2 = HA \times HB$

3° Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [CA] et K le milieu de [AD]. Démontrer que le triangle IJK est rectangle en J et que dans ce triangle H est le pied de la hauteur issue de J.

(D'après Bac C.E., Polynésie française, 1991)

Correction :



1. a) $S(C) = A$ et $S(B) = C$; le rapport de la similitude est donné par le rapport AC sur CB. On a donc $\frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}$ et l'angle de la similitude est

$$\text{l'angle formé par } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$$

b) Soit Ω le centre de S ; on a donc $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}$ donc $\Omega \in$ cercle

de diamètre [AC] = C_1 . $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = \frac{\pi}{2}$ donc $\Omega \in$ cercle de diamètre [BC] = C_2 . De plus, $C_1 \cap C_2 = \{H, C\}$ et $S(C) = A$ donc n'est pas invariant par S , d'où $\Omega = H$.

c) $S(A) = A' \Rightarrow (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HA'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $A' \in (CH)$; $S((CA))$ est une droite perpendiculaire à (CA)

passant par A (car $S(C) = A$). De plus, $A' \in$ à la droite // à (BC) passant par A .

Donc $A' = (CH) \cap (\text{la } \perp \text{ à } (CA) \text{ passant par } A) = D$ d'où $A' = D$.

2. $S(H) = H$; $S(B) = C$ et $S(C) = A$ on a donc $\frac{HC}{HB} = k$ et $\frac{HA}{HC} = k$ donc $\frac{HC}{HB} = \frac{HA}{HC} \Leftrightarrow HC^2 = HA \times HB$

3. La similitude "conserve" les milieux, donc I milieu de $[BC] \Rightarrow S(I)$ milieu de $[AC]$

D'où $S(I) = J$ et $S(H) = H$ on a donc $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) = \frac{\pi}{2}$

De même $S(J) = K$ on a $(\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{HK}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}) = (\overrightarrow{HJ}, \overrightarrow{HK})$

Ce qui prouve que H, I et K sont alignés et que (JH) est la hauteur issue de J dans (IJK) .

$S(I) = J$ et $S(J) = K \Rightarrow (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{JK}) = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle IJK est un triangle rectangle en J .

Exercice 6. Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, i, j) .

Soit f l'application de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ définie par :
$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$$

1° Soit z l'affixe de M , z' l'affixe de M' . Trouver une relation simple entre z et z' .

Montrer qu'il existe un réel k tel que, quel que soit A et B dans P d'images A' et B' on ait :

$\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = k \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$ déterminer k . Montrer que f n'est pas une similitude directe.

2° Montrer que f a un point invariant Ω et un seul que l'on déterminera.

3° Montrer qu'il existe une homothétie h de centre Ω et une droite D passant par Ω telles que :

$$f = h \circ s_D = s_D \circ h \quad \text{où } s_D \text{ est la réflexion d'axe } D.$$

Correction :

1. $z' = x' + iy = \sqrt{3}x + y - 3 + i(x - \sqrt{3}y + 3) = (\sqrt{3} + i)(x - iy) - 3 + 3i$.

Donc $z' = (\sqrt{3} + i)\bar{z} - 3 + 3i$.

$$\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = |b' - a'| = |\sqrt{3} + i| |b - a| = 2 \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \Rightarrow k = 2$$

▪ S n'est de la forme $z' = a.z + b$ donc ce n'est pas une similitude.

▪ Soit σ une réflexion d'axe $(O; i)$, c. a. d. : $z \mapsto \bar{z}$ et $g = f \circ \sigma$ tel que $g : z \mapsto (\sqrt{3} + i)z - 3 + 3i$.
 g conserve les angles orientés (c'est une similitude) ; or σ ne conserve pas les angles orientés (c'est une réflexion) ; donc f ne conserve pas les angles \Rightarrow donc f n'est pas une similitude.

2. Soit z_0 le point invariant celui-ci vérifie :
$$\begin{cases} x = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases} \dots \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \Omega(\sqrt{3}; \sqrt{3})$$

3. $h_{(\Omega; 2)}$ d'après le 1° et le 2°, $h^{-1} \circ f$ est une isométrie laissant Ω invariant et changeant les angles de vecteurs en leurs opposés. $h^{-1} \circ f$ est donc une réflexion = $S_D \Leftrightarrow f = S_D \circ h = h \circ S_D$. (homothétie et réflexion dont l'axe contient le centre de l'homothétie permuted)

Exercice 7.

On considère dans le plan complexe, le rectangle OABC où A a pour affixe $\sqrt{2}$ et C a pour affixe i . On note I le milieu de [OA], J celui de [BC].

1° Montrer que les rectangles OABC et JIAB ont le même format (*Rappel* : le format d'un rectangle est le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$).

2° Soit S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = -i \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.

a) Donner l'angle et le rapport de S.

b) Préciser les images par S des sommets du rectangle OABC.

3° On se propose d'étudier quelques propriétés géométriques du centre de S, noté Ω .

a) Montrer que les cercles de diamètre [OJ], [BC], [AB] et [AI] sont concourants en Ω .

b) On note h la transformation $S \circ S$. Préciser la transformation h et en déduire les alignements suivants : Ω , B et I ainsi que de Ω , A et C.

Note : Les feuilles de format commercial A_0, A_1, \dots sont des rectangles de format (au sens mathématiques) égal à $\sqrt{2}$. Le format A_0 est un rectangle d'aire 1 m^2 ($L = 118,8 \text{ cm}, l = 84 \text{ cm}$). Par pliage on obtient le format A_1, \dots , puis A_4 , qui est celui des feuilles à écrire, de classeur, etc...

(on a $L = 29,7 \text{ cm}, l = 21 \text{ cm}, \frac{29,7}{21} = 1,4142857\dots$ et $\sqrt{2} = 1,4142857\dots$).

Correction :

1. Pour OABC on a : $\frac{OA}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ pour JIAC on a : $\frac{IJ}{AI} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; même format.

2. a) Le rapport de la similitude est la norme de a , l'angle de la similitude est l'argument de a , avec $a = -i \frac{\sqrt{2}}{2}$;

donc le rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle de la similitude est $-\frac{\pi}{2}$.

b) $O : 0 \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} + i \Rightarrow S(O) = J$

$A : \sqrt{2} \mapsto -i \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S(A) = I$

$B : \sqrt{2} + i \mapsto -i \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{2} + i) + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \sqrt{2} \Rightarrow S(B) = A$

$C : i \mapsto -i \frac{\sqrt{2}}{2} \times i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i = i + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S(C) = B$

3. a) $S(\Omega) = \Omega$ et $\forall M \ S(M) = M' \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = -\frac{\pi}{2}$ donc $\Omega \in$ cercle de diamètre [M'M]

b) $S(O) = J \Rightarrow \Omega \in$ cercle de diamètre [OJ]

$S(A) = I \Rightarrow \Omega \in$ cercle de diamètre [AI]

$S(B) = A \Rightarrow \Omega \in$ cercle de diamètre [AB]

$S(C) = B \Rightarrow \Omega \in$ cercle de diamètre [BC]

c) $h = S \circ S$ et $S = H_{(\Omega; \frac{\sqrt{2}}{2})} \circ R_{(\Omega; -\frac{\pi}{2})} = R \circ H$ donc $h = H \circ R \circ R \circ H$

or $R \circ R = H'_{(\Omega; -1)}$ (2 rotations successives de rapport $-\frac{\pi}{2}$ = symétrie centrale = homothétie de rapport -1)

d'où $h = h \circ H' \circ H$ toutes ces homothéties ont le même centre donc le rapport est égal au produit des

rappports $\frac{\sqrt{2}}{2} \times (-1) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow h = H''_{(\Omega; -\frac{1}{2})}$.

Dans une homothétie le centre, l'image et le point sont alignés :

$h(B) = S \circ S(B) = S(A) = I \Rightarrow \Omega, B, I$ alignés.

$h(C) = S \circ S(C) = S(B) = A \Rightarrow \Omega, B, I$ alignés.