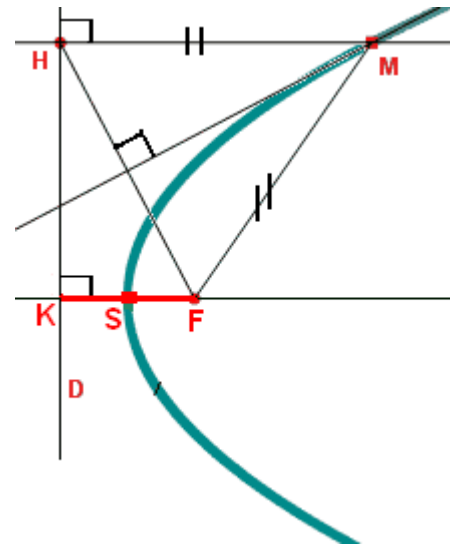


I. Parabole

I. Définition

Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à cette droite.

On appelle parabole de foyer F et de directrice D l'ensemble des points M du plan tels que $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur D .



- ❖ La distance FK est appelée paramètre de la parabole.
- ❖ La droite (FK) est appelée axe de la parabole.
- ❖ (FK) est l'axe de symétrie de la parabole.
- ❖ Le milieu S du segment $[FK]$ est appelé sommet de la parabole.

Construction d'un point d'une parabole

Soit P une parabole de Foyer F et de directrice D .

- ❖ On Choisit un point H de la directrice D .
- ❖ On construit la perpendiculaire à D passant par H .
- ❖ On construit la médiatrice du segment $[FH]$.

Ces deux droites se coupent en un point M de la parabole P .

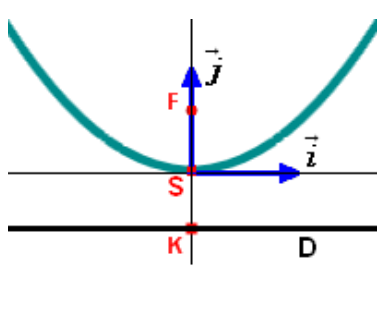
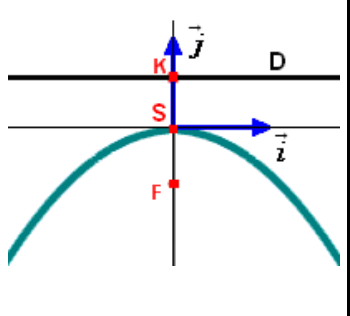
Remarque

La parabole P de foyer F et de directrice D est l'ensemble des centres des cercles tangents à D et passant par F .

2. Equation réduite d'une parabole

P est une parabole de sommet S et de foyer F . (S, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé et p un réel strictement positif.

<p>Equation réduite: $y^2 = 2px$ Directrice D: $x = -\frac{p}{2}$ Foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.</p>		<p>Equation réduite: $y^2 = -2px$ Directrice: $x = \frac{p}{2}$; Foyer $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.</p>	
---	--	--	--

<p>Equation réduite: $x^2 = 2py$ Directrice D : $y = -\frac{p}{2}$ Foyer F $\left(0, \frac{p}{2}\right)$</p>		<p>Equation réduite: $x^2 = -2py$ Directrice D : $y = \frac{p}{2}$ Foyer F $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$</p>	
---	---	---	---

Exercice 1

On donne la parabole P d'équation réduite $y = 2x^2$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer le paramètre p, le foyer F et la directrice D de cette parabole.

Solutions

$$y = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}y = 2py \Rightarrow 2p = \frac{1}{2} \text{ donc } p = \frac{1}{4}.$$

L'axe des ordonnées est l'axe focal de P donc son foyer F admet pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ et sa directrice admet pour équation $y = -\frac{1}{8}$.

3. Tangente à une parabole

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé du plan et p un réel strictement positif. On a les résultats résumés dans le tableau suivant:

Equation réduite de la parabole P	Equation de la tangente à P au point $M(x_0, y_0)$
$y^2 = 2px$	$yy_0 = p(x + x_0)$
$y^2 = -2px$	$yy_0 = -p(x + x_0)$
$x^2 = 2py$	$xx_0 = p(y + y_0)$
$x^2 = -2py$	$xx_0 = -p(y + y_0)$

Exercice 2

Soit P la parabole d'équation réduite $y^2 = 8x$, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Vérifier que le point A $(1, 2\sqrt{2})$ est un point de la parabole P
- b) Donner une équation de la tangente T à la parabole P en A.
- 2) Déterminer les tangentes éventuelles à P menées du point B $(0, 2)$.

Solutions

1) a) $(2\sqrt{2})^2 = 8 \times 1$ donc A est un point de la parabole P.

b) $y^2 = 8x = 2px \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow p = 4$

T admet pour équation $yy_0 = p(x + x_0)$ où $x_0 = 1$ et $y_0 = 2\sqrt{2}$

Ce qui donne $2\sqrt{2}y = 4(x + 1)$ ou encore $y = \sqrt{2}(x + 1)$

2) Soit $M(a, b)$ un point de la parabole P où la tangente T en ce point passe par le point B .

On sait que T admet pour équation $yb = p(x + a) = 4(x + a)$

$$B(0, 2) \in T \Leftrightarrow 2b = 4a \Leftrightarrow b = 2a$$

En plus $M(a, b) \in P \Leftrightarrow b^2 = 8a$ d'où le système suivant $\begin{cases} b = 2a \\ b^2 = 8a \end{cases}$ qui admet pour solutions

$(0, 0)$ et $(2, 4)$

La tangente au point $M(a, b)$ admet pour équation $yb = 4(x + a)$

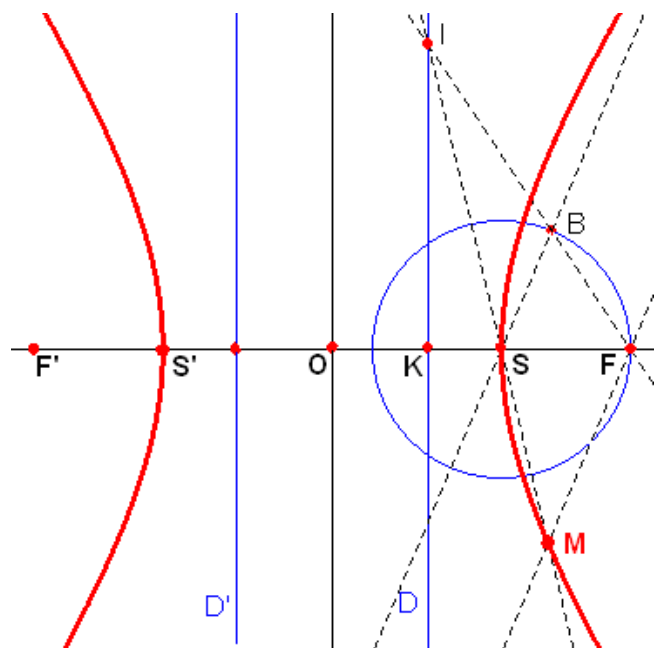
- Tangente au point O admet pour équation $x = 0$ (C'est la tangente au sommet)
- Tangente au point $M(2, 4)$ admet pour équation $y = x + 2$

II. Hyperbole

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à cette droite et un réel $e > 1$. On appelle hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e , l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur D .

Soit (H) une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e et K le projeté orthogonal de F sur D

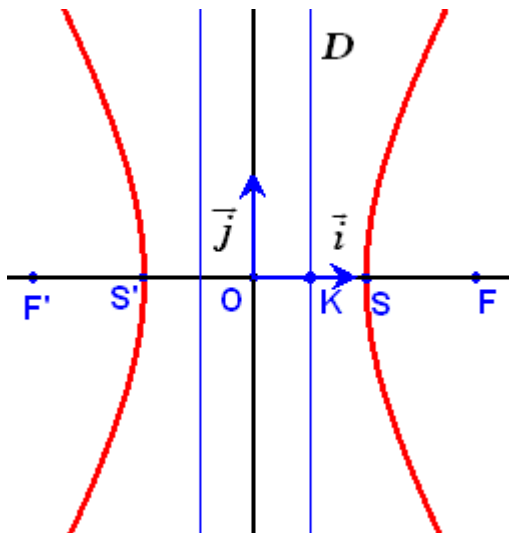
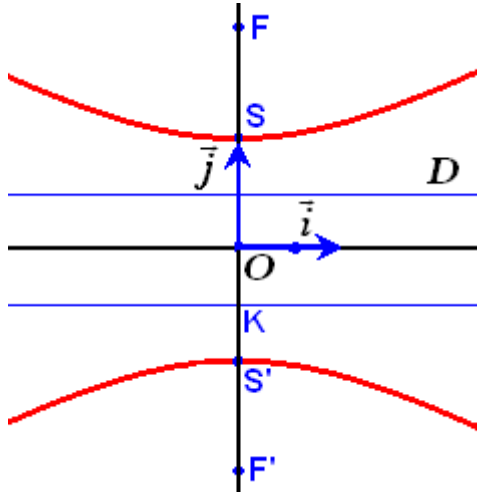
- ❖ La droite (FK) est appelée axe focal de l'hyperbole
- ❖ (H) rencontre l'axe focal en deux points S et S' appelés sommets de cette hyperbole.
 S barycentre des points pondérés $(F, 1)$ et $(K, -e)$
 S' barycentre des points pondérés $(F, 1)$ et (K, e)
- ❖ Le milieu O du segment $[SS']$ est un centre de symétrie de l'hyperbole (H) .
- ❖ L'hyperbole (H) admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal (FK) et la perpendiculaire à (FK) en O (axe non focal).
- ❖ Le symétrique du foyer F par rapport à O est un deuxième foyer pour l'hyperbole (H) .
- ❖ La droite D' symétrique de la directrice D par rapport à O est une deuxième directrice de l'hyperbole (H) , c'est la directrice associée au foyer F' , alors que D c'est la directrice associée au foyer F .

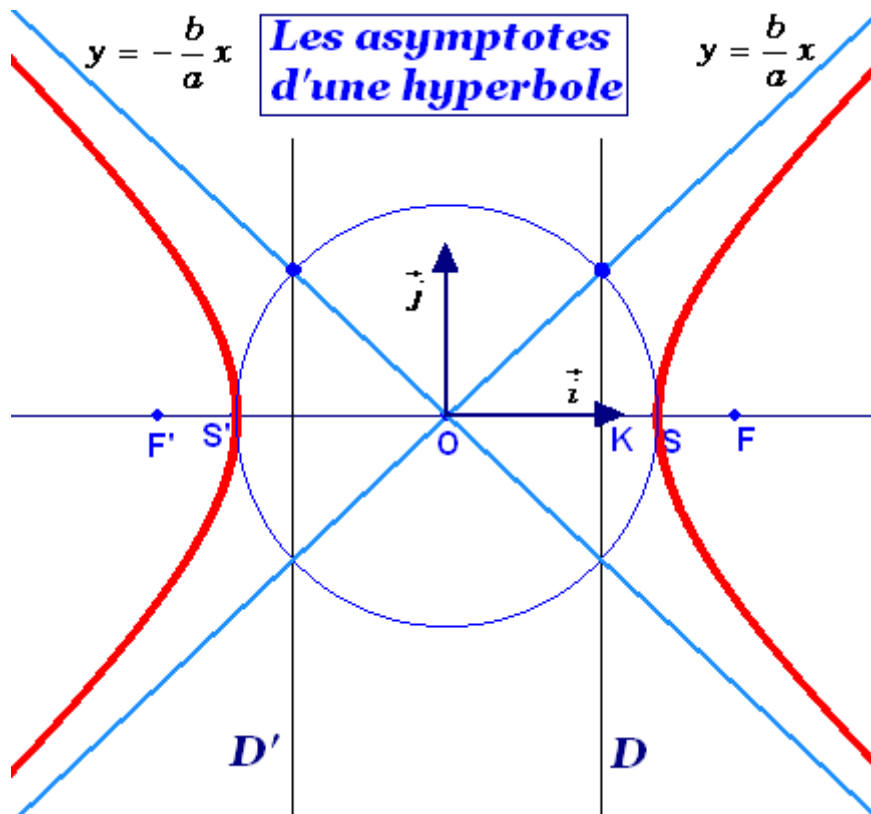


Construction d'un point d'une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e

- On construit le point S barycentre des points pondérés $(F,1)$ et (K,e) où K le projeté orthogonal de F sur D .
- On trace le cercle (C) de centre S passant par F .
- On choisit un point B sur le cercle (C) autre que F .
- On trace la droite (FB) qui coupe la directrice D en un point I .
- On construit la parallèle à (BS) passant par F . Cette droite coupe (IS) en un point M de l'hyperbole.

Soient (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé du plan et (H) une hyperbole de foyer F , de directrice D , d'excentricité e , de centre O et de sommets S et S' .

<p>Equation: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$</p> <p>$F(c, 0); F'(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$</p> <p>$D: x = \frac{a^2}{c}; e = \frac{c}{a}$</p> <p>$S(a, 0); S'(-a, 0)$</p> <p>Tangente au point $M(x_0, y_0)$</p> $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$	
<p>Equation: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$</p> <p>$F(0, c); F'(0, -c)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$</p> <p>$D: y = \frac{b^2}{c}; e = \frac{c}{b}$</p> <p>$S(0, b); S'(0, -b)$</p> <p>Tangente au point $M(x_0, y_0)$</p> $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	



Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit (H) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que: $x^2 - 3y^2 - 36 = 0$

- 1) Montrer que (H) est une hyperbole.
- 2) Déterminer les coordonnées de ses sommets et de ses foyers
- 3) Donner les équations de ses asymptotes.

Solutions

$$1) x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4y^2 - 36}{36} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Donc (H) est une hyperbole.

2) Les sommets de (H) sont les points $S(6,0)$ et $S'(-6,0)$.

Les foyers de (H) sont les points $F(3\sqrt{5},0)$ et $F'(-3\sqrt{5},0)$

Car $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

3) Les asymptotes sont les droites d'équations $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes admet une équation de la forme $xy = k$ où k est un réel non nul.

Exemple

Considérons l'hyperbole (H) de l'exercice précédent qui admet pour équation

$$x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \text{ dans un repère orthonormé } R = (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

Ses asymptotes $\Delta_1 : x - 2y = 0$ et $\Delta_2 : x + 2y = 0$

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta_1 \text{ et } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta_2$$

Considérons le nouveau repère $R' = (O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$

Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans le repère R et (X,Y) dans le repère R'.

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ &= X\vec{u}_1 + Y\vec{u}_2 = X(2\vec{i} + \vec{j}) + Y(-2\vec{i} + \vec{j}) = (2X - 2Y)\vec{i} + (X + Y)\vec{j} \end{aligned}$$

Donc $x = 2X - 2Y$ et $y = X + Y$

$$\begin{aligned} M \in (H) &\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow (2X - 2Y)^2 - 4(X + Y)^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow \cancel{4X^2} - 8XY + \cancel{4Y^2} - \cancel{4X^2} - 8XY - \cancel{4Y^2} = 36 \Leftrightarrow XY = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

III. Ellipse

I. Définition et conséquences

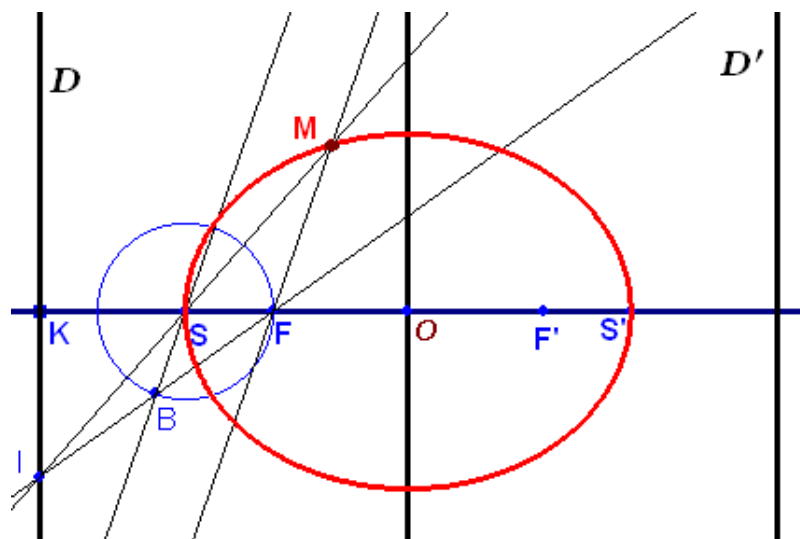
**Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à cette droite et un réel e tel que $0 < e < 1$.
On appelle ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur D.**

Soit (E) une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e et K le projeté orthogonal de F sur D

- ❖ La droite (FK) est appelée axe focal de l'ellipse.
- ❖ (E) rencontre l'axe focal en deux points S et S' appelés sommets principaux de cette ellipse.
 S barycentre des points pondérés (F,1) et (K,e)
 S' barycentre des points pondérés (F,1) et (K,-e)
- ❖ Le milieu O du segment [SS'] est un centre de symétrie de l'ellipse (E).
- ❖ l'ellipse (E) admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal (FK) et la perpendiculaire à (FK) en O (axe non focal).

- ❖ Le symétrique du foyer F par rapport à O est un deuxième foyer pour l'ellipse (E).
- ❖ La droite D' symétrique de la directrice D par rapport à O est une deuxième directrice de l'ellipse (E), c'est la directrice associée au foyer F' , alors que D c'est la directrice associée au foyer F .
- ❖ l'ellipse (E) coupe l'axe non focal en deux points appelés sommets secondaires de cette ellipse.

Construction d'un point d'une ellipse de foyer F , de directrice D et d'excentricité e
 Même construction que dans le cas d'une hyperbole.



2. Equations et coordonnées

Soient (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé du plan et (H) une hyperbole de foyer F , de directrice D , d'excentricité e , de centre O et de sommets S et S' .

Equation: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

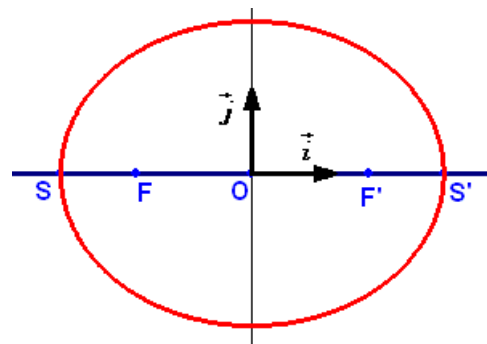
avec $a > b > 0$

$F(c, 0); F'(-c, 0)$

avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$D: x = \frac{a^2}{c}; e = \frac{c}{a}$

$S(a, 0); S'(-a, 0)$



Tangente au point $M(x_0, y_0)$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Equation: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

avec $b > a > 0$

$F(0, c) ; F'(0, -c)$

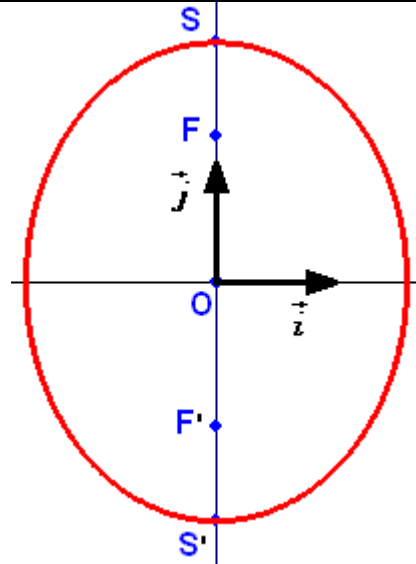
Avec $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

D: $y = \frac{b^2}{c} ; e = \frac{c}{b}$

$S(0, b) ; S'(0, -b)$

Tangente au point $M(x_0, y_0)$

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$



III. Equation non réduite d'une conique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par \mathcal{C} l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, où A, B, C, D et E sont des réels.

\mathcal{C} est une parabole ou la réunion de deux droites parallèles ou une droite ou le vide si

$AB = 0$

\mathcal{C} est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes si **$AB < 0$**

\mathcal{C} est une ellipse ou un cercle ou un singleton ou le vide si **$AB > 0$**